Controlli Automatici e Teoria dei Sistemi

Esempi di sistemi dinamici

Prof. Roberto Guidorzi

Dipartimento di Elettronica, Informatica e Sistemistica
Università di Bologna
Viale del Risorgimento 2, 40136 Bologna

Avvertenza: Alcuni contenuti di queste *slide*, che vengono fornite agli allievi solo come traccia delle lezioni svolte, sono tratti dai seguenti testi ai quali si rimanda per una trattazione completa della materia:

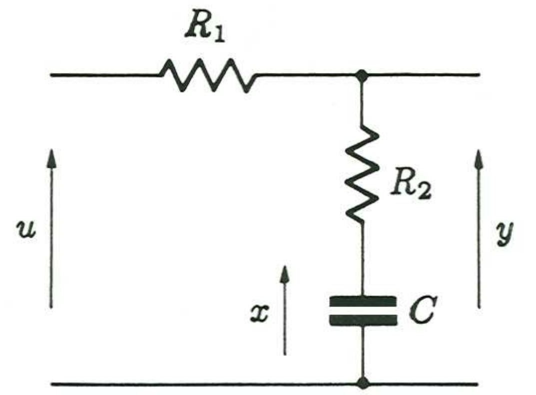
Giovanni Marro - Teoria dei Sistemi e del Controllo, Zanichelli, Bologna.

Indice ed errata corrige: http://sting.deis.unibo.it/tds/Corso/Testi/Testi.htm

Giovanni Marro - Teoria dei sistemi: Fondamenti, Patron, Bologna.

(Il testo è fuori stampa ma è disponibile nella biblioteca Dore della Facoltà di Ingegneria)

Rete ritardatrice



Il circuito precedente è descritto dalle seguenti equazioni, una differenziale e l'altra algebrica,

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + b\,u(t)\ , \tag{1}$$

$$y(t) = c\,x(t) + d\,u(t)\ , \tag{2}$$

in cui le funzioni ai secondi membri si dicono rispettivamente *funzione di velocità di transizione dello stato* e *funzione d'uscita*. Con u ed y si indicano le tensioni di ingresso e di uscita, con x la tensione ai capi del condensatore, che può essere assunta come (l'unica) variabile di stato, con $\dot{x}$ la sua derivata rispetto al tempo dx/dt.

Le costanti a, b, c e d sono legate ai parametri elettrici indicati in figura dalle seguenti relazioni:

$$a := -\frac{1}{C(R_1+R_2)} \qquad b := \frac{1}{C(R_1+R_2)}$$
$$c := \frac{R_1}{R_1+R_2} \qquad d := \frac{R_2}{R_1+R_2}\ .$$

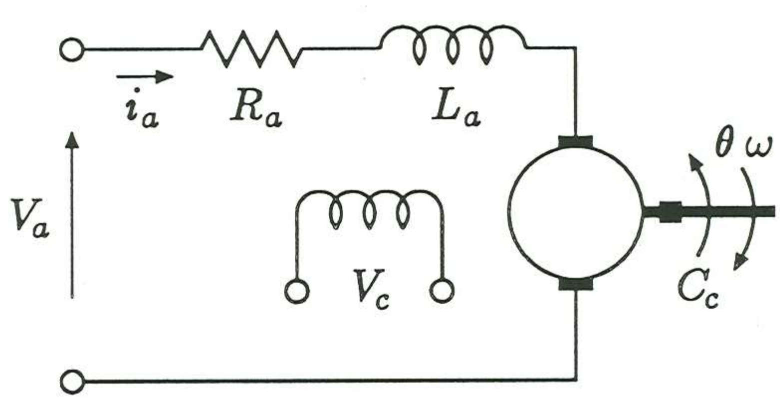
La soluzione della (1) per $t \in [t_0, t_1]$ è espressa da

$$x(t) = x_0\, e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}\, b\, u(\tau)\, d\tau\ , \tag{3}$$

che viene detta *funzione di transizione dello stato*. Sostituendo la (3) nella (2), si ottiene la *funzione di risposta*

$$y(t) = c\left(x_0\, e^{a(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} e^{a(t-\tau)}\, b\, u(\tau)\, d\tau\right) + d\, u(t)\ . \tag{4}$$

Motore elettrico in corrente continua



Il sistema è un motore in corrente continua a controllo di armatura descritto dalle seguenti equazioni:

$$V_a(t) = R_a\, i_a(t) + L_a \frac{di_a(t)}{dt} + F_c(t) \tag{1}$$

$$C_m(t) = B\,\omega(t) + J\,\frac{d\omega(t)}{dt} + C_c(t)\ . \tag{2}$$

Nella (1) V_a è la tensione applicata, R_a ed L_a sono la resistenza e l'induttanza di armatura, i_a e F_c la corrente di armatura e la forza controelettromotrice, mentre nella (2) C_m è la coppia motrice, B, J e ω sono il coefficiente di attrito viscoso, il momento d'inerzia e la velocità angolare dell'albero. Infine C_c è una coppia di carico applicata dall'esterno.

Assumendo V_c costante si possono scrivere le ulteriori relazioni:

$$F_c(t) = k_1\, \omega(t) \;; \qquad C_m(t) = k_2\, i_a(t) \;, \tag{3}$$

in cui k_1 e k_2 rappresentano coefficienti costanti, che sono numericamente uguali fra loro se le unità di misura adottate sono coerenti (volt e ampere per tensioni e correnti, Nm e rad/sec per coppie e velocità angolari).

Si orienti il sistema assumendo come variabili di ingresso $u_1 := V_a$, $u_2 := C_c$ e come variabile d'uscita $y := \theta$, la posizione angolare dell'albero, che è legata ad ω dall'equazione

$$\frac{d\theta(t)}{dt} = \omega(t) \;. \tag{4}$$

Si assumano quindi come variabili di stato la corrente di armatura, la velocità angolare e la posizione angolare dell'albero, cioè $x_1 := i_a$, $x_2 := \omega$, $x_3 := \theta$. Le equazioni precedenti si possono scrivere nella seguente forma compatta:

$$\dot{x}(t) = A\, x(t) + B\, u(t) \;, \tag{5}$$

$$y(t) = C\, x(t) + D\, u(t) \;, \tag{6}$$

ove $x := (x_1,\, x_2,\, x_3)$, $u := (u_1,\, u_2)$ e

$$A := \begin{bmatrix} -R_a/L_a & -k_1/L_a & 0 \\ k_2/J & -B/J & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B := \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1/J \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$C := \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D := \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Si noti che l'ultimo termine nell'equazione (6) può essere cancellato, essendo D una matrice nulla. Infatti in questo caso l'ingresso non influisce sull'uscita direttamente, ma solo attraverso lo stato. Sistemi con questa proprietà sono molto frequenti e sono denominati *sistemi puramente dinamici*.

Modello preda–predatore

Un ecosistema contiene una popolazione di erbivori (conigli) che si considera come unica fonte di nutrimento di una seconda popolazione di carnivori predatori (volpi). Il modello preda–predatore che descrive l'interazione tra tali popolazioni è del tipo

$$\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = a_1\, x_1 \left(1 - \frac{x_1}{k}\right) - a_2\, x_1 x_2$$
$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = -a_3\, x_2 + a_4\, x_1 x_2$$

ove le variabili di stato x_1 ed x_2 indicano, in unità opportune, il numero di prede ed il numero di predatori presenti nell'ecosistema. La costante k rappresenta la capacità portante dell'ecosistema nei riguardi delle prede cioè il numero massimo di conigli che, a regime, possono essere presenti in assenza di volpi; i coefficienti a_2 ed a_4 sono soggetti al vincolo $a_4 < a_2$ che indica come la resa di predazione sia sempre minore di 1.

La prima equazione del modello descrive la dinamica delle prede; il termine $a_1 x_1$ (rateo di crescita) mette in gioco la capacità riproduttiva di tale specie mentre il termine $-a_1 x_1^2/k$

tiene conto della diminuzione del rateo di crescita al crescere della popolazione a causa delle risorse limitate dell'ecosistema. Quando il numero di prede raggiunge la capacità portante, k, dell'ecosistema non si ha alcuna crescita. Il termine $-a_2x_1x_2$ mette in gioco il decremento nella popolazione delle prede dovuto all'attività dei predatori.

La seconda equazione descrive la dinamica dei predatori supponendo che l'incremento di tale popolazione sia proporzionale alla quantità di cibo ottenuto mediante predazione (termine $a_4x_1x_2$) e che in assenza di prede la specie predatrice si estingua (rateo di estinzione $-a_3x_2$).

Il modello considerato ammette lo stato di equilibrio ovvio $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, corrispondente all'assenza delle due popolazioni nell'ecosistema. Altre condizioni di equilibrio possono essere dedotte annullando le derivate delle variabili di stato cioè dalle condizioni

$$
\begin{aligned}
0 &= a_1\,x_1\left(1-\frac{x_1}{k}\right)-a_2\,x_1x_2\\
0 &= -a_3\,x_2+a_4\,x_1x_2\ .
\end{aligned}
$$

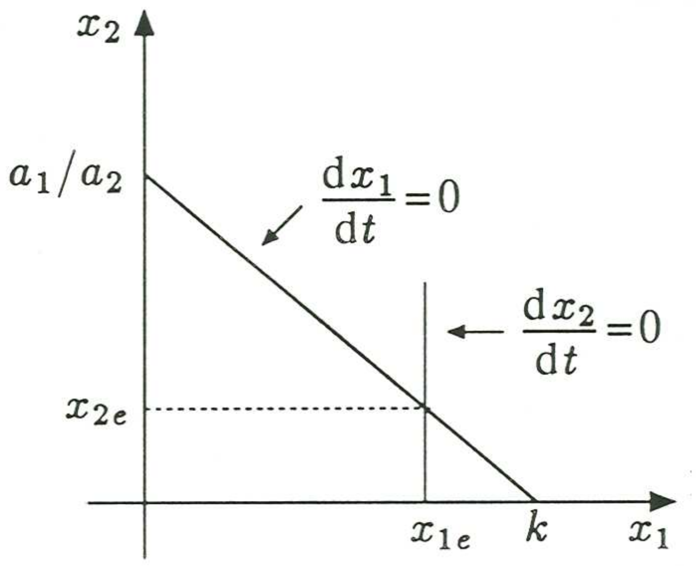
Dalla prima di tali relazioni si ricava il legame tra le variabili di stato dato da

$$x_2 = \frac{a_1}{a_2} - \frac{a_1}{k\, a_2}\, x_1$$

mentre dalla seconda si ricava direttamente il valore della prima variabile di stato in condizioni di equilibrio

$$x_{1e} = \frac{a_3}{a_4}\ .$$

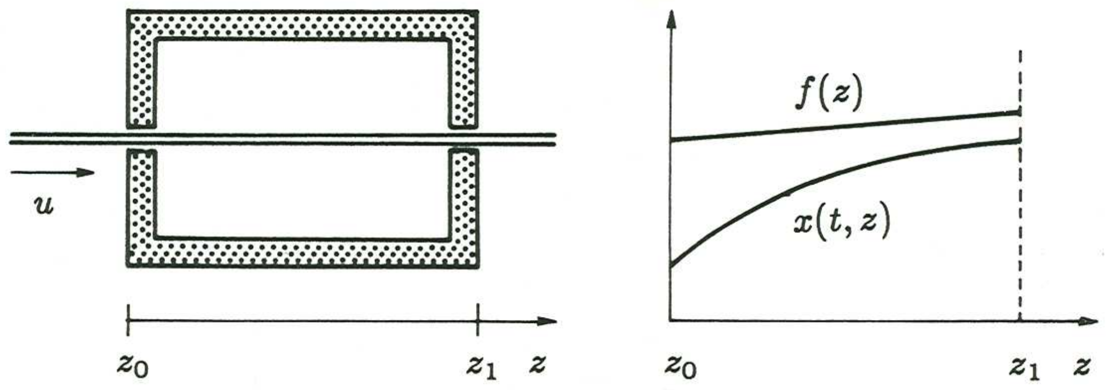
L’esistenza di un condizione di equilibrio che preveda la presenza delle due specie è quindi assicurata dalla condizione algebrica $a_3/a_4 < k$ come può essere osservato nella figura che segue che riporta le rette che descrivono le due condizioni trovate.



Il numero di predatori nella condizione di equilibrio è dato da

$$x_{2e} = \frac{a_1}{a_2}\left(1 - \frac{a_3}{k\,a_4}\right) \; .$$

Forno continuo



Si consideri il forno continuo rappresentato in figura: un nastro di materiale omogeneo a sezione costante viene trasportato con velocità regolabile u attraverso un forno. Le distribuzioni di temperatura sia nel forno sia nel nastro si suppongono variabili nella direzione del moto e uniformi entro sezioni ortogonali a tale direzione. Si indica con $f(z)$ la temperatura lungo il forno, che si assume costante nel tempo, e con $x(t,z)$ quella lungo il nastro, che è funzione sia del tempo che della posizione, dato che u è variabile. Il sistema è descritto dalla seguente equazione di diffusione termica unidimensionale:

$$\frac{\partial x(t,z)}{\partial t} = k_1 \frac{\partial^2 x(t,z)}{\partial z^2} + u(t) \frac{\partial x(t,z)}{\partial z} + k_2 \left(x(t,z) - f(z) \right) ,$$

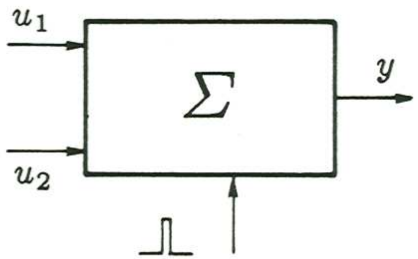
in cui k_1 e k_2 sono costanti legate rispettivamente alla conducibilità termica interna e di superficie del nastro.

Si assume la velocità di trasporto u come variabile di ingresso e la temperatura del nastro all'uscita del forno come variabile di uscita, cioè

$$y(t) = x(t, z_1)\ .$$

La funzione $x(t, \cdot)$ rappresenta lo stato all'istante t; l'equazione differenziale alle derivate parziali che descrive la dinamica del sistema può essere risolta qualora siano assegnati lo stato iniziale $x(t_0, \cdot)$, la temperatura del nastro prima del riscaldamento $x(\cdot, z_0)$

Sistema a stati finiti



f

$x \backslash u_1 u_2$	00	01	10	11
0	0	0	0	1
1	0	1	1	1

g

$x \backslash u_1 u_2$	00	01	10	11
0	0	0	0	0
1	0	1	0	0

Le variabili di ingresso del sistema considerato, u_1 e u_2, sono le posizioni di due pulsanti e la variabile di uscita, y, è l'accensione di una lampada.

Il valore di ciascuna variabile è rappresentato da un simbolo binario, ad esempio 1 o 0 a seconda che i pulsanti siano premuti o rilasciati e la lampada sia accesa o spenta. I dati di ingresso sono campionati, cioè accettati quando perviene al sistema un impulso di sincronismo di breve durata; anche le variazioni dell'uscita avvengono in corrispondenza degli impulsi di sincronismo pertanto il loro avvicendamento nel tempo è discreto.

L'evoluzione del sistema può essere descritta a parole come segue: "la lampada si accende quando il simbolo di ingresso attuale è 01 e se in precedenza, dei due simboli 00 e 11, si è presentato per ultimo 11".

Un modello matematico che riproduce tale evoluzione è dato dalle equazioni

$$x(k+1) = f\big(x(k), u(k)\big) \ ,$$
$$y(k) = g\big(x(k), u(k)\big) \ ,$$

ove f e g sono la funzione di stato futuro e la funzione di uscita; x è una variabile di stato binaria il cui valore (0 o 1) cambia quando viene campionato in ingresso il simbolo 00 o il simbolo 11: pertanto x rappresenta la "memoria del sistema". Se le funzioni f e g vengono definite come è indicato nelle tabelle di figura, si può verificare facilmente che la variabile d'uscita si modifica nel tempo come è specificato nella precedente descrizione a parole.