Controlli Automatici e Teoria dei Sistemi
Stima dello stato in presenza di disturbi

Prof. Roberto Guidorzi

Dipartimento di Elettronica, Informatica e Sistemistica
Università di Bologna
Viale del Risorgimento 2, 40136 Bologna

Avvertenza: Queste *slide* vengono fornite agli allievi solo come traccia delle lezioni svolte. Per un approfondimento si suggerisce il testo:

Marco Tibaldi - Progetto di sistemi di controllo, Pitagora, Bologna, 1995, ISBN 8837107625.

7.1 Il filtro di Kalman per i sistemi continui

Le misure dell'ingresso e dell'uscita dei processi reali sono spesso affette da errori; ciò rende non sempre idonei gli osservatori progettati supponendo esatte le misure. Si consideri il sistema dinamico lineare, non stazionario e continuo descritto dal modello

$$\dot{x}(t) = A(t)\,x(t) + B(t)\,u(t) + w(t) \quad (1)$$

$$y(t) = C(t)\,x(t) + v(t) \quad (2)$$

con stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e per il quale:

1) L'ingresso $u(t)$ sia misurabile esattamente per ogni $t \geq t_0$;

2) $w(t)$ e $v(t)$ siano processi stocastici Gaussiani bianchi, mutuamente incorrelati con matrici di covarianza note:

$$\mathrm{E}\left[w(t)\,v^T(\tau)\right] = 0 \qquad \forall\, t, \tau \geq 0 \quad (3)$$

$$\mathrm{E}\left[w(t)\,w^T(\tau)\right] = Q(t)\,\delta(t-\tau) \quad (4)$$

$$\mathrm{E}\left[v(t)\,v^T(\tau)\right] = R(t)\,\delta(t-\tau)\ ; \quad (5)$$

3) x_0 sia un vettore aleatorio con valore medio e matrice di covarianza noti:

$$\mathrm{E}\left[x_0\right] = \overline{x}_0, \qquad \mathrm{E}\left[(x - \overline{x}_0)(x - \overline{x}_0)^T\right] = P_0\,; \tag{6}$$

4) I processi stocastici $w(t)$ e $v(t)$ siano incorrelati con il vettore aleatorio x_0:

$$\mathrm{E}\left[x_0\, w^T(t)\right] = 0, \qquad \mathrm{E}\left[x_0\, v^T(t)\right] = 0\,. \tag{7}$$

Si consideri ora l'osservatore identità per il modello (1),(2):

$$\dot{\hat{x}}(t) = A(t)\,\hat{x}(t) + B(t)\,u(t) + K(t)\left[y(t) - C(t)\,\hat{x}(t)\right] \tag{8}$$

con stato iniziale $\hat{x}(t_0) = \hat{x}_0$. Si definisca l'errore di stima $e(t) = x(t) - \hat{x}(t)$ e l'errore quadratico medio di stima

$$\mathrm{E}\left[e^T(t)\, e(t)\right]\,. \tag{9}$$

L'errore quadratico medio di stima all'istante t dipende dalla scelta di $\hat{x}_0$ e della matrice (funzione del tempo) $K(t)$ e fornisce una misura dell'attendibilità della stima $\hat{x}(t)$ all'istante t. Il progetto dell'*osservatore ottimo* consiste nel scegliere $\hat{x}_0$ la matrice $K(t)$ in modo da minimizzare l'errore quadratico medio di stima (9).

Se la matrice $R(t)$ è definita positiva (se cioè tutte le misure delle componenti del vettore di uscita sono affette da rumore) la soluzione del problema [Kalman–Bucy, 1961] è data da

$$K(t) = P(t)C^T(t)R^{-1}(t) \tag{10}$$

$$\hat{x}_0 = \overline{x}_0 \tag{11}$$

ove $P(t)$ è la soluzione dell'equazione di Riccati

$$\dot{P}(t) = A(t)P(t) + P(t)A^T(t) - P(t)C^T(t)R^{-1}(t)C(t)P(t) + Q(t) \tag{12}$$

con

$$P(t_0) = P_0 \,. \tag{13}$$

La stima fornita dall'osservatore ottimo detto *filtro di Kalman*, è non polarizzata cioè il valor medio dell'errore di stima è nullo

$$\mathrm{E}\left[e(t)\right] = 0 \tag{14}$$

mentre la sua matrice di covarianza coincide con $P(t)$:

$$\mathrm{E}\left[e(t)e^T(t)\right] = P(t)\,. \tag{15}$$

Il valore dell'errore quadratico medio di stima è dato da

$$\mathrm{E}\left[e^T(t)\,e(t)\right] = \mathrm{tr}\left[\,P(t)\,\right]\,. \tag{16}$$

La matrice $K(t)$ è detta matrice dei guadagni del filtro. Il filtro di Kalman è il dispositivo lineare che fornisce la stima con errore quadratico medio minimo; non esiste cioè alcun altro dispositivo algebrico o dinamico che, elaborando linearmente le misure $y(t)$ e $u(t)$, fornisca una stima dello stato con errore quadratico medio di stima minore. L'errore di stima $y(t) - C(t)\hat{x}(t)$ è detto *innovazione* ed è un processo stocastico bianco con matrice di covarianza uguale a quella di $v(t)$.

La non polarizzazione della stima $\hat{x}(t)$ dipende dalla condizione (11) ed è indipendente dalla particolare scelta della matrice dei guadagni $K(t)$. Posto infatti

$$\overline{x}(t) = \mathrm{E}\left[x(t)\right], \qquad \overline{\hat{x}}(t) = \mathrm{E}\left[\hat{x}(t)\right], \qquad \overline{y}(t) = \mathrm{E}\left[y(t)\right] \tag{17}$$

si ottiene

$$\dot{\overline{x}}(t) = A(t)\,\overline{x}(t) + B(t)\,u(t) \tag{18}$$

$$\overline{x}(t_0) = \overline{x}_0 \tag{19}$$

$$\overline{y}(t) = C(t)\,\overline{x}(t) \tag{20}$$

$$\dot{\overline{\hat{x}}}(t) = A(t)\,\overline{\hat{x}}(t) + B(t)\,u(t) + K(t)\left[\overline{y}(t) - C(t)\,\overline{\hat{x}}(t)\right] \tag{21}$$

$$\overline{\hat{x}}(t_0) = \hat{x}_0\,. \tag{22}$$

Con la condizione (11) risulta $\mathrm{E}[e(t)] = \overline{x}(t) - \overline{\hat{x}}(t) = 0$ poiché il termine $\overline{y}(t) - C(t)\overline{\hat{x}}(t)$ è identicamente nullo indipendentemente dalla scelta di $K(t)$.

Matrice di covarianza dell'errore di stima

L'errore di stima è descritto dal modello

$$\dot{e}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\;e(t) + w(t) - K(t)\,v(t) \tag{23}$$

$$e(t_0) = x_0 - \overline{x}_0\,. \tag{24}$$

Indicando con $P(t) = \mathrm{E}\{[e(t) - \overline{e}(t)][e(t) - \overline{e}(t)]^T\}$ la matrice di covarianza dell'errore di stima, si ottiene, dal modello (23),

$$\dot{P}(t) = [A(t) - K(t)C(t)]\;P(t) + P(t)\,[A(t) - K(t)C(t)]^T + Q(t) + K(t)R(t)K^T(t), \tag{25}$$

con la condizione iniziale $P(t_0) = P_0$ cioè, considerando la relazione (10), l'equazione di Riccati (12). L'equazione (25) può venire utilizzata anche per calcolare la matrice di covarianza dell'errore di stima utilizzando una matrice dei guadagni $K(t)$ diversa da quella ottima (10).

Il guadagno del filtro

Il filtro di Kalman è un osservatore identità nel quale, anche per i sistemi stazionari, la matrice dei guadagni varia nel tempo. Nell'osservatore identità la differenza tra la misura dell'uscita del sistema e la sua stima fornita dall'osservatore è un errore (innovazione) utilizzato per la correzione della stima cioè per estinguere l'errore iniziale. In ambiente stocastico l'innovazione deve essere usata anche per correggere gli effetti dell'errore di previsione; inoltre, a causa degli errori modellati tramite il processo $v(t)$, l'innovazione può essere non nulla anche quando la stima del vettore di stato è esatta. La matrice dei guadagni, $K(t)$, costituisce un compromesso tra due esigenze distinte: l'opportunità di utilizzare le misure disponibili per correggere la stima dello stato e la necessità di non peggiorare la stima corrente a causa degli errori sulla misura dell'uscita.

Si può osservare come nell'osservatore ottimo la proporzionalità tra la matrice $K(t)$ e la matrice di covarianza dell'errore di stima $P(t)$ renda i guadagni dell'osservatore tanto più elevati quanto più elevato è, a parità di altre condizioni, l'errore sulla stima corrente. La proporzionalità tra la $K(t)$ ed il prodotto $C(t)R^{-1}(t)$ può essere interpretata come proporzionalità tra i guadagni dell'osservatore e l'affidabilità delle misure sull'uscita.

L'osservatore ottimo nel caso scalare stazionario

Si consideri il modello lineare e stazionario del primo ordine

$$\dot{x}(t) = a\,x(t) + w(t), \qquad x(0) = x_0 \tag{26}$$

$$y(t) = x(t) + v(t) \tag{27}$$

ove $w(t)$ e $v(t)$ siano processi stocastici bianchi con autocorrelazione data da:

$$\mathrm{E}\left[w(t)w(\tau)\right] = q\,\delta(t-\tau) \tag{28}$$

$$\mathrm{E}\left[v(t)v(\tau)\right] = r\,\delta(t-\tau) \tag{29}$$

L’equazione di Riccati è data, in questo caso, da

$$\dot{p}(t) - 2\,a\,p(t) + \frac{p^2(t)}{r} - q = 0, \qquad p(0) = p_0\,; \tag{30}$$

il valore di regime di $p(t)$ è dato dalla radice positiva dell’equazione di secondo grado che si ottiene imponendo $\dot{p}(t) = 0$ nell’equazione precedente.

Stima di una costante scalare mediante il filtro di Kalman

Si supponga di volere stimare il valore di una costante scalare x_0 non nota a partire da una misura deteriorata da un errore costituito da rumore bianco. Il problema è descritto dal seguente modello

$$\dot{x}(t) = 0, \qquad x(0) = x_0 \tag{31}$$

$$y(t) = x(t) + v(t) \tag{32}$$

ove

1) $v(t)$ è un processo stocastico scalare bianco con autocorrelazione nota

$$\mathrm{E}\,[\,v(t)\,v(\tau)\,] = \sigma_v^2\,\delta(t-\tau)\,; \tag{33}$$

2) x_0 è una variabile aleatoria con valore medio $\overline{x}_0$ e varianza p_0 noti;

3) Il processo stocastico $v(t)$ è incorrelato con la variabile aleatoria x_0;

$$\mathrm{E}\,[\,x_0\,v(t)\,] = 0\,. \tag{34}$$

Il modello del filtro è dato da

$$\dot{\hat{x}}(t) = k(t)\ [y(t) - \hat{x}(t)]\,, \qquad \hat{x}(0) = \overline{x}_0 \tag{35}$$

dove

$$k(t) = \frac{1}{\sigma_v^2}\,p(t), \qquad \dot{p}(t) = -\frac{1}{\sigma_v^2}\,p^2(t), \qquad p(0) = p_0\,. \tag{36}$$

Integrando l'equazione di Riccati si ottiene

$$p(t) = \frac{p_0}{1 + (p_0/\sigma_v^2)\,t}, \qquad k(t) = \frac{p_0}{\sigma_v^2 + p_0\,t}\,. \tag{37}$$

Come si può osservare, per $t \to \infty$, $p(t)$ tende a zero e quindi la stima $\hat{x}(t)$ tende al valore da stimare x_0; dopo un tempo sufficientemente lungo si ha quindi a disposizione una stima esatta della grandezza da stimare. Inoltre, poiché per $t \to \infty$ anche $k(t)$ tende a zero, l'importanza attribuita alla misura disponibile diminuisce al crescere di t.

7.2 Il filtro di Kalman per i sistemi a tempo discreto

Si consideri il modello lineare discreto

$$x(k+1) = A(k)\,x(k) + B(k)\,u(k) + w(k) \tag{38}$$

$$y(k) = C(k)\,x(k) + v(k) \tag{39}$$

con stato iniziale $x(k_0) = x_0$ e per il quale

1) $u(k)$ sia una funzione nota a priori o misurabile per $k = k_0, k_0 + 1, \ldots;$

2) $w(k)$ e $v(k)$ siano processi stocastici discreti nel tempo, mutuamente incorrelati, Gaussiani, bianchi e con matrici di covarianza note:

$$\mathrm{E}\left[\,w(j)\,v^T(k)\,\right] = 0 \tag{40}$$

$$\mathrm{E}\left[\,w(j)\,w^T(k)\,\right] = Q(k)\,\delta_k^j, \qquad Q(k) > 0 \tag{41}$$

$$\mathrm{E}\left[\,v(j)\,v^T(k)\,\right] = R(k)\,\delta_k^j, \qquad R(k) > 0\;; \tag{42}$$

3) x_0 sia un vettore aleatorio con valore atteso e matrice di covarianza noti

$$\mathrm{E}[x_0] = \overline{x}_0, \qquad \mathrm{E}\left[\,(x_0 - \overline{x}_0)\,(x_0 - \overline{x}_0)^T\,\right] = P_0\;; \tag{43}$$

4) I processi stocastici $w(k)$ e $v(k)$ siano incorrelati con il vettore aleatorio x_0:

$$\mathrm{E}\left[\, x_0\, w^T(k) \,\right] = 0, \qquad \mathrm{E}\left[\, x_0\, v^T(k) \,\right] = 0\,. \tag{44}$$

L'osservatore identità per questo sistema è dato da

$$\hat{x}(k+1) = [\, A(k) - K(k)\, C(k) \,]\; \hat{x}(k) + B(k)\, u(k) + K(k)\, y(k) \tag{45}$$

con stato iniziale $\hat{x}(k_0) = \hat{x}_0$. Definendo l'errore di stima $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$ e l'errore quadratico medio di stima

$$\mathrm{E}\left[\, e^T(k)\, e(k) \,\right] \tag{46}$$

il problema della determinazione di $\hat{x}_0$ e della matrice $K(j)$ che rendono minimo l'errore quadratico medio di stima è detto problema dell'osservatore ottimo a tempo discreto. Se $R(k)$ è definita positiva per ogni k la soluzione è data da

$$\hat{x}(k_0) = \overline{x}_0 \tag{47}$$

$$K(k) = A(k)\, P(k)\, C^T(k)\, \left[\, R(k) + C(k)\, P(k)\, C^T(k) \,\right]^{-1} \tag{48}$$

essendo $P(k)$ soluzione dell'equazione di Riccati discreta

$$
\begin{aligned}
P(k+1) = & -A(k)\,P(k)\,C^T(k)\,\left[\,R(k)\, + C(k)\,P(k)\,C^T(k)\,\right]^{-1} C(k)\,P(k)\,A^T(k) \\
& +A(k)\,P(k)\,A^T(k) + Q(k)
\end{aligned}
\tag{49}
$$

con condizione iniziale $P(k_0) = P_0$. La stima così ottenuta è non polarizzata e la matrice di covarianza dell'errore di stima coincide con la matrice $P(k)$. L'errore quadratico medio è dato da

$$
\mathrm{E}\left[\,e^T(k)\,e(k)\,\right] = \mathrm{tr}\left[\,P(k)\,\right]\,. \tag{50}
$$

Tale osservatore ottimo è detto filtro di Kalman a tempo discreto. La matrice $K(k)$ è detta matrice dei guadagni del filtro.

Utilizzando l'espressione di $K(k)$ è possibile anche riscrivere l'equazione di Riccati discreta nella forma

$$
P(k+1) = [A(k) - K(k)\,C(k)]\,P(k)\,[A(k) - K(k)\,C(k)]^T + Q(k) + K(k)\,R(k)\,K^T(k)\,. \tag{51}
$$

7.3 Il filtro di Kalman stazionario

La non stazionarietà dell'osservatore ottimo è dovuta tanto alla non stazionarietà del sistema da osservare e dei processi stocastici in gioco quanto al fatto che il guadagno, dipendendo dalla soluzione dell'equazione di Riccati, è funzione del tempo.

Nel caso di sistemi e di processi stocastici stazionari assume interesse studiare l'osservatore ottimo a regime. Si consideri il sistema dinamico lineare, stazionario e continuo descritto dal modello

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) + D\,w(t) \tag{52}$$

$$y(t) = C\,x(t) + v(t) \tag{53}$$

con lo stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e per il quale $w(t)$ e $v(t)$ siano processi stocastici stazionari bianchi e Gaussiani mutuamente incorrelati e con matrici di covarianza:

$$\mathrm{E}\left[w(t)\,w^T(\tau)\right] = Q\,\delta(t-\tau) \tag{54}$$

$$\mathrm{E}\left[v(t)\,v^T(\tau)\right] = R\,\delta(t-\tau)\,; \tag{55}$$

In tale caso, sotto condizioni poco restrittive, la soluzione a regime dell'equazione di Riccati è una soluzione, semidefinita positiva, P_∞, dell'equazione algebrica di Riccati

$$A\,P + P\,A^T - P\,C^T\,R^{-1}C\,P + D\,Q\,D^T = 0\,. \tag{56}$$

e l'osservatore ottimo stazionario minimizza l'errore quadratico medio di stima

$$\lim_{t_0\to-\infty} \mathrm{E}\left[\,e^T(t)\,e(t)\,\right] \tag{57}$$

per qualunque condizione iniziale P_0 (≥ 0); il valore dell'errore quadratico medio di stima è dato da

$$\lim_{t_0\to-\infty} \mathrm{E}\left[\,e^T(t)\,e(t)\,\right] = \mathrm{tr}\left[\,P_\infty\,\right]\,. \tag{58}$$

Nel progetto del filtro di Kalman stazionario non ha più importanza la conoscenza di $\overline{x}_0$ e della matrice di covarianza, P_0, del vettore x_0.

7.4 Il filtro di Kalman stazionario per i sistemi a tempo discreto

Si consideri il modello lineare stazionario discreto completamente ricostruibile

$$x(k+1) = A\,x(k) + B\,u(k) + w(k) \tag{59}$$

$$y(k) = C\,x(k) + v(k) \tag{60}$$

con stato iniziale $x(0) = x_0$ e per il quale

1) $u(k)$ sia una funzione nota a priori o misurabile per $k = 0, 1, \ldots;$

2) $w(k)$ e $v(k)$ siano processi stocastici discreti nel tempo, mutuamente incorrelati, Gaussiani, bianchi e con matrici di covarianza note:

$$\mathrm{E}\left[\,w(j)\,v^T(k)\,\right] = 0 \tag{61}$$

$$\mathrm{E}\left[\,w(j)\,w^T(k)\,\right] = Q\,\delta_k^j, \qquad Q > 0 \tag{62}$$

$$\mathrm{E}\left[\,v(j)\,v^T(k)\,\right] = R\,\delta_k^j, \qquad R > 0\;; \tag{63}$$

L'osservatore ottimo per questo sistema è dato, per $k \to \infty$, da

$$\hat{x}(k+1) = [\, A - K\, C\,]\; \hat{x}(k) + B\, u(k) + K\, y(k) \tag{64}$$

ove

$$K = A\, P\, C^T (R + C\, P\, C^T)^{-1} \tag{65}$$

essendo P la soluzione semidefinita positiva dell'equazione algebrica di Riccati

$$P - A\, P\, A^T + A\, P\, C^T (R + C\, P\, C^T)^{-1} C\, P\, A^T - Q = 0. \tag{66}$$

La stima fornita da tale osservatore minimizza

$$\lim_{k \to \infty} E\, [e^T(k)\, e(k)] \tag{67}$$

ove $e(k) = x(k) - \hat{x}(k)$.