Controlli Automatici e Teoria dei Sistemi
Il controllo ottimo LQG

Prof. Roberto Guidorzi

Dipartimento di Elettronica, Informatica e Sistemistica
Università di Bologna
Viale del Risorgimento 2, 40136 Bologna

Avvertenza: Queste *slide* vengono fornite agli allievi solo come traccia delle lezioni svolte. Per un approfondimento si suggerisce il testo:

Marco Tibaldi - Progetto di sistemi di controllo, Pitagora, Bologna, 1995, ISBN 8837107625.

8.1 Il controllo ottimo LQG a tempo finito per i sistemi stazionari continui

Si consideri il sistema dinamico lineare, stazionario e continuo descritto dal modello

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) + w(t) \tag{1}$$

$$y(t) = C\,x(t) + v(t) \tag{2}$$

con stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e per il quale:

1) L'ingresso $u(t)$ sia misurabile esattamente per ogni $t \geq t_0$;

2) $w(t)$ e $v(t)$ siano processi stocastici Gaussiani bianchi, mutuamente incorrelati con matrici di covarianza note:

$$\mathrm{E}\left[w(t)\,v^T(\tau)\right] = 0 \qquad \forall\, t, \tau \geq 0 \tag{3}$$

$$\mathrm{E}\left[w(t)\,w^T(\tau)\right] = Q_f\,\delta(t-\tau) \tag{4}$$

$$\mathrm{E}\left[v(t)\,v^T(\tau)\right] = R_f\,\delta(t-\tau)\;; \tag{5}$$

3) x_0 sia un vettore aleatorio con valore medio e matrice di covarianza noti:

$$\mathrm{E}\left[x_0\right] = \overline{x}_0, \qquad \mathrm{E}\left[(x - \overline{x}_0)(x - \overline{x}_0)^T\right] = P_0\,; \tag{6}$$

4) I processi stocastici $w(t)$ e $v(t)$ siano incorrelati con il vettore aleatorio x_0:

$$\mathrm{E}\left[x_0\, w^T(t)\right] = 0, \qquad \mathrm{E}\left[x_0\, v^T(t)\right] = 0\,. \tag{7}$$

Si consideri poi il problema di controllare lo stato del sistema ad uno stato finale $x(t_f)$ molto prossimo a zero minimizzando la seguente funzione costo

$$J = \frac{1}{2}\, x(t_f)^T S_f\, x(t_f) + \frac{1}{2}\int_0^{t_f} \left(x(t)^T Q_c\, x(t) + u(t)^T R_c\, u(t)\right) \mathrm{d}t \tag{8}$$

ove $S_f \geq 0$, $R_c > 0$, $Q_c > 0$. Si dimostra che la soluzione lineare ottima del problema precedente è costituita dalla legge di controllo

$$u(t) = K_c(t)\hat{x}(t) \tag{9}$$

ove $u(t) = K_c(t)x(t)$ è la legge di retroazione che risolve il problema di regolazione ottima a tempo finito relativo al sistema deterministico

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \tag{10}$$

con stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e funzione costo data dalla (8); $\hat{x}(t)$ è la stima dello stato data dall'osservatore ottimo.

Ne segue che l'ordine del dispositivo di controllo è uguale a quello del sistema controllato e che il modello del controllore è descritto dalle relazioni

$$\dot{x}_c(t) = [A - K_f(t)\,C\,]\;x_c(t) + K_f(t)\,y(t) + B\,u(t)\,, \qquad x_c(0) = x_0\,, \tag{11}$$

$$K_f(t) = P(t)\,C^T R_f^{-1}\,, \tag{12}$$

$$\dot{P}(t) = AP(t) + P(t)A^T - P(t)C^T R_f^{-1} C P(t) + Q_f\,, \qquad P(0) = P_0\,, \tag{13}$$

$$u(t) = K_c(t)\,x_c(t)\,, \tag{14}$$

$$K_c(t) = R_c^{-1} B^T S(t)\,, \tag{15}$$

$$\dot{S}(t) + A^T S(t) + S(t)A - S(t)BR_c^{-1}B^T S(t) + Q_c = 0, \qquad S(t_f) = S_f\,. \tag{16}$$

8.2 Il regolatore ottimo stazionario in ambiente stocastico

Si consideri il sistema dinamico lineare, stazionario e continuo descritto dal modello

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) + w(t) \tag{17}$$

$$y(t) = C\,x(t) + v(t) \tag{18}$$

con stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e per il quale:

1) L'ingresso $u(t)$ sia misurabile esattamente per ogni $t \geq t_0$;

2) $w(t)$ e $v(t)$ siano processi stocastici Gaussiani bianchi, mutuamente incorrelati con matrici di covarianza note:

$$\mathrm{E}\left[w(t)\,v^T(\tau)\right] = 0 \qquad \forall\, t, \tau \geq 0 \tag{19}$$

$$\mathrm{E}\left[w(t)\,w^T(\tau)\right] = Q_f\,\delta(t-\tau) \tag{20}$$

$$\mathrm{E}\left[v(t)\,v^T(\tau)\right] = R_f\,\delta(t-\tau)\;; \tag{21}$$

3) x_0 sia un vettore aleatorio con valore medio e matrice di covarianza noti:

$$\mathrm{E}\left[x_0\right] = \overline{x}_0, \qquad \mathrm{E}\left[(x-\overline{x}_0)(x-\overline{x}_0)^T\right] = P_0\,; \tag{22}$$

4) I processi stocastici $w(t)$ e $v(t)$ siano incorrelati con il vettore aleatorio x_0:

$$\mathrm{E}\left[x_0\, w^T(t)\right] = 0, \qquad \mathrm{E}\left[x_0\, v^T(t)\right] = 0\,. \tag{23}$$

Si consideri poi il problema di controllare lo stato iniziale del sistema allo stato finale zero minimizzando la seguente funzione costo

$$J = \frac{1}{2}\int_0^\infty \left(x(t)^T Q_c\, x(t) + u(t)^T R_c\, u(t)\right) \mathrm{d}t \tag{24}$$

ove $R_c > 0$, $Q_c > 0$. Si dimostra che la soluzione lineare ottima del problema precedente è costituita dalla legge di controllo

$$u(t) = K_c\, \hat{x}(t) \tag{25}$$

ove $u(t) = K_c\, x(t)$ è la legge di retroazione che risolve il problema di regolazione ottima a tempo infinito relativo al sistema deterministico

$$\dot{x}(t) = A\,x(t) + B\,u(t) \tag{26}$$

con stato iniziale $x(t_0) = x_0$ e funzione costo data dalla (24); $\hat{x}(t)$ è la stima dello stato data dall'osservatore ottimo.

Ne segue che l'ordine del dispositivo di controllo è uguale a quello del sistema controllato e che il modello del controllore è descritto dalle relazioni

$$\dot{x}_c(t) = [A - K_f\,C]\,x_c(t) + K_f\,y(t) + B\,u(t)\,, \quad x_c(0) = x_0\,, \tag{27}$$

$$K_f = P\,C^T R_f^{-1}\,, \tag{28}$$

$$AP + PA^T - P\,C^T R_f^{-1} CP + Q_f = 0\,, \tag{29}$$

$$u(t) = K_c\,x_c(t)\,, \tag{30}$$

$$K_c = R_c^{-1} B^T S\,, \tag{31}$$

$$A^T S + SA - SBR_c^{-1} B^T S + Q_c = 0\,. \tag{32}$$

Nel caso in cui i processi $w(t)$ e $v(t)$ siano Gaussiani, la soluzione descritta è ottima in assoluto, anche senza limitare il controllore ad essere lineare. Per tale motivo il regolatore ottimo descritto viene indicato anche come regolatore stazionario LQG (*Linear quadratic Gaussian*).